Chapitre 4 Suites de fonctions - Séries de fonctions

I. Suites de fonctions

Sauf précision contraire, I est un intervalle réel, non réduit à un point et les fonctions considérées sont définies sur I à valeurs réelles ou complexes

I.1. Convergence simple et convergence uniforme

On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1 (convergence simple). On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I si, $\forall x\in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f se traduit par :

$$\forall x\in I,\ \forall \varepsilon>0,\ \exists n_{x,\varepsilon}\in\mathbb{N} \mid (\forall n\geq n_{x,\varepsilon},\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$$

La notation $n_{x,\varepsilon}$ signifiant que $n_{x,\varepsilon}$ dépend de x et de ε.

On note $f_n \xrightarrow{C.S.} f$ sur I.

Remarque 1. La limite f est unique.

En utilisant les résultats relatifs aux suites numériques, on montre facilement les résultats énoncés avec le théorème qui suit :

Théorème 1. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions qui convergent simplement sur I vers f et g respectivement.

1. La suite $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $|f|$.
2. $\forall \lambda,\mu$ scalaires, la suite $(\lambda f_n+\mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $(\lambda f+\mu g)$
3. Si les fonctions $f_n \leq g_n$ sont à valeurs positives avec $f_n\leq g_n$ à partir d'un certain rang alors $f\leq g$



- Si les f_n sont à valeurs positives et croissantes à partir d'un certain rang, alors f est croissant

- Si les f_n sont à valeurs positives et convexes à partir d'un certain rang, alors f est convexe (*)

Exemples

1°/ $I = [0,1]$ $f_n(x) = x^n \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$

Alors $f_n \xrightarrow{C.S.} f$ avec f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$

f n'est pas continue sur I.

2°/ $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_n(x) = \cos^n x$. La suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$ non continue sur I.

Remarque 2

On peut remarquer d'après ces deux exemples que la limite simple d'une suite de fonctions continues sur I n'est pas nécessairement continue sur I. c'est à dire $\lim\limits_{x \to x_0} [\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)] \neq \lim\limits_{n \to +\infty} [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]$

3°/ $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{C.S.} f(x) = 0$ avec $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Mais $f_n'(x) = \cos nx$ n'admet en général aucune limite.

$f'(x) = 0$.

Remarque 3. Si les f_n sont dérivables et convergent vers une fonction dérivable f, il n'y a aucune raison que les dérivées f_n' convergent et même si c'est le cas, qu'elles convergent vers f'

Autrement dit $\frac{d}{dx} [\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)] \neq \lim\limits_{n \to +\infty} [\frac{d}{dx} f_n(x)]$

on ne peut pas intervertir les symboles de limites [illegible] sans précaution

1°/ $I = [0,1]$. $f_n(x) = 2n^2 x \exp(-n^2 x^2)$

$\forall x \in [0,1]$ $\quad f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.S.} f$ avec $f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$.

On a $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - \exp(-n^2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

et $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$

On ne peut pas faire traverser le signe d'intégration par le symbole de limite sans précaution. Cet exemple est dû à Darboux en 1875.

Tous ces exemples montrent l'insuffisance de la convergence simple des suites de fonctions. D'où la notion de convergence uniforme.

<u>Définition 2</u> <u>Convergence uniforme</u>

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_\varepsilon \ \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

On note $f_n \xrightarrow{C.U} f$

<u>De manière équivalente</u> (f_n) converge uniformément sur I vers f si et seulement si la suite numérique de terme général

$$u_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

est définie à partir d'un certain rang et vérifie $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.



$f_n(x) - f$

Exemples:

1°/ $f_n(x) = \frac{nx+1}{x+n}$, $x \in [0,1]$ $n \geq 1$.

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x = f(x)$ $\forall x \in [0,1]$

Or $f_n(x) - x = \frac{1-x^2}{x+n} \leq \frac{1}{n}$ $\forall x \in [0,1]$.

Donc $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que.

$$f_n \xrightarrow{C.U.} f \text{ sur } I = [0,1].$$

2°/ La suite $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$ converge uniformément sur $[-a,a]$, a quelconque positif mais pas sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1 Si $f_n \xrightarrow{C.U.} f$ sur I alors $f_n \xrightarrow{C.S.} f$ sur I.

La manière équivalente dans la définition 2 (conv. uniforme ~~sur I~~) fournit une méthode pour prouver une convergence uniforme sur I (resp. une convergence non uniforme sur I):

a/ Etude de la convergence simple pour trouver f.

b/ Calcul de $U_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.

c/ Démonstration que la suite (U_n) converge vers 0 (resp. ne converge pas vers 0).

Il sera parfois plus rapide de majorer (resp. minorer) U_n par une suite qui tend vers 0 (resp. qui (* verso) ne tend pas vers 0)

Proposition 2. Si I est une réunion finie d'intervalles, $I = \bigcup_{k=1}^{p} I_k$ alors

$$f_n \xrightarrow[\text{sur } I]{C.U} f \iff f_n \xrightarrow[\text{sur } I_k]{C.U} f \quad \forall k = 1 \to p.$$

Preuve

$\Rightarrow$ | $f_n \xrightarrow{C.U} f$ sur I alors $\sup_I |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+]{} 0$

Or $\sup_{I_K} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_I |f_n(x) - f(x)|$

$\to \sup_{I_K} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall k = 1, \longrightarrow p$

$\Leftarrow$ | Si $f_n \xrightarrow{C.U} f$ sur chacun des I_K, avec :

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{1\leq k\leq p} \left(\sup_{I_K} |f_n(x) - f(x)|\right)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{p} \sup_{I_K} |f_n(x) - f(x)|$$

Alors $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur I.

Le résultat qui suit nous donne un critère permettant de prouver la non convergence uniforme

Théorème Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur I, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I, la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration : Résulte des inégalités

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_I |f_n(x) - f(x)|$$

Valable pour tout n.

Pour montrer la non convergence uniforme, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I t.q. la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (En supposant bien sur que la convergence simple vers f a été prouvée)



Exemple (*) verso $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

On a $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{C.S} f$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) = x$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x$, impaire et dérivable

$g_n'(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \leq 0$.

$g_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{n,k} = 2kn\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow g_n(x_{n,k}) = -2nk\pi$. On a donc $\sup_{[-2nk\pi, 2nk\pi]} |g_n(x)| = 2n|k|\pi$

$k \in \mathbb{Z}$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = +\infty$

La convergence n'est donc pas uniforme (*)

Critère de Cauchy uniforme

Définition: On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I si :

$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

ou $(\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Théorème 3 La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur I ssi elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.

Dém. $\Rightarrow$ $\left|\sup_I |f_n(x) - f_m(x)|\right| \leq \sup_I |f_n(x) - f(x)| + \sup_I |f_m(x) - f(x)|$

où $(f_n) \xrightarrow{C.U} f$ sur I



$\Leftarrow$) Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément de Cauchy sur I. Alors.

$\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \forall x \in I$,

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon. \quad (*)$$

Pour tout x fixé dans I, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, elle converge donc vers un scalaire $f(x)$.

En faisant tendre m vers l'infini dans $(*)$, on déduit que

$$\forall x \in I, \forall n \geq n_\varepsilon, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

C'est à dire que. $f_n \xrightarrow{C.U} f$ sur I.

<u>Propriétés des fonctions stables par convergence uniforme</u>

(Théorème de continuité)

<u>Théorème 4</u> Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I, alors la limite f est continue sur cet intervalle.

<u>Preuve</u> $\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0$

$\forall x \in I \quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ (Conv. Uniforme)

f_n est continue en $x_0 \in I$, $\exists \eta_n>0$ t.q.

$$\forall x \in]x_0-\eta_n, x_0+\eta_n[\cap I, \ |f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon$$

et par suite pour $x \in]x_0-\eta_n, x_0+\eta_n[\cap I$, on a:

$$|f(x)-f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x)-f_n(x_0)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x_0)-f(x_0)|}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon$$

f est alors continue en x_0, x_0 qlq dans I

Alors f est continue sur I

Remarque Ce résultat peut être utilisé pour justifier une non convergence uniforme.
si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f non continue sur I, alors la convergence ne peut être uniforme.

Exemple 1°/ $f_n(x) = x^n$ $I = [0,1]$ $f_n \xrightarrow{C.S} f$.

$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$. f n'est pas continue sur I alors $f_n \not\xrightarrow{C.U} f$.

Théorème 5 (Théorème d'interversion de limite et d'intégration)

Soient $[a,b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f (continue d'après ce qui précède)

Alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$ a une limite et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Preuve.

$f_n \xrightarrow{C.U} f$ sur $[a,b]$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$
$$\leq (b-a)\sup_{[a,b]}|f_n(x) - f(x)|$$
$$\leq (b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Remarque : On dit aussi que la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,b]$ permet d'intervertir limite et intégration.

Proposition. Les hypothèses sont celles du théorème 5

Soit $x_0 \in [a,b]$. On pose $F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$ ($\forall n$)

et $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Alors, on a.

La suite de fonctions (F_n) converge uniformément vers F sur $[a,b]$.

Preuve : D'après le théorème 5, f est continue sur $[a,b]$, donc F est bien définie

Soit $\varepsilon > 0$

$f_n \xrightarrow{C.U} f$ sur $[a,b] \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_\varepsilon$, on a

$\sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

donc pour tout x dans $[a,b]$, on a.

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{b-a}|x - x_0| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Ce qui implique que. $F_n \xrightarrow{C.U} F$ sur $[a,b]$

Exemples

1°/ $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $I = [a,1]$ avec $0 < a < 1$.

$f_n \xrightarrow{C.S} f$ avec $f(x) = 1$.

On a $f_n \xrightarrow[{[a,1]}]{C.U} f$

$$\forall x \in [a,1], \quad F_n(x) = \int_a^x \left(1 - \frac{1}{1+nt}\right)dt$$

$$= (x-a) - \frac{\ln(1+nx)}{n} + \frac{\ln(1+na)}{n}$$

$$F(x) = (x-a)$$

On a bien $\lim_{n \to +\infty} -\frac{\ln(1+nx)}{n} + \frac{\ln(1+na)}{n} = 0$

De plus $\frac{\ln(1+nx)}{n} \leq \frac{\ln(1+n)}{n}$.

La limite est donc uniforme sur $[a,1]$.

2°/ Pour $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n \cdot 2^n x^2}$

$f_n \xrightarrow{C.S} f$ $\quad f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$.

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{2^n t}{1+n 2^n t^2} dt = \frac{1}{2n} \ln(1+n 2^n x^2)$$

$F(x) = 0$. Or $\forall x \neq 0$ $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \frac{1}{2} \ln 2 \neq 0$.

On déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

<u>Remarque</u>

:/ Le théorème 5 et la proposition qui s'ensuit, ne s'étendent pas aux intégrales généralisées.

<u>Exemple.</u> $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0,n] \\ \frac{n+1-x}{n} & \text{si } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

<u>$\forall n$</u>

f_n est continue sur $[0,+\infty[$, admet une intégrale généralisée sur $[0,+\infty[$.

f_n converge uniformément vers f ($f(x)=0$ sur $[0,+\infty[$)

mais $\quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\, dt$.

<u>héorème 6</u> (Théorème de dérivation) (*)

I intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On suppose :

i/ $\forall n$, f_n est dérivable (resp. C^1) sur I

i/ $f'_n \xrightarrow{C.U} g$ sur tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset I$

g la limite de (f'_n) sur I

ii/ $\exists x_0 \in I$ t.q. $(f_n(x_0))$ converge. Alors

1°/ f_n conv. unift. sur tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset I$

soit f la limite de (f_n) sur I.

2°/ f dérivable (resp. C^1) sur I et $f' = g$.

Preuve 1°/ On commence par montrer que (f_n) converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset$

Soit $x \in [a,b]$, $n, m \in \mathbb{N}$. On appliquera le théorème des accroissements finis

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

$$\leq \sup_{t \in [x_0, x]} |f_n'(t) - f_m'(t)|\,|x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

Soit $[\alpha, \beta]$ un fermé borné de I t.q. $[a,b] \subset [\alpha, \beta]$ et $x_0 \in [\alpha, \beta]$

On $\sup_{[\alpha,\beta]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq (\beta - \alpha) \sup_{[\alpha,\beta]} |f_n'(t) - f_m'(t)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$

$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[\alpha, \beta]$ et donc sur $[a,b]$

Soit f la limite simple de f_n sur I (*)

°/ a/ Cas où les (f_n) sont de classe C^1

Soit $x \in I$, $\exists [a,b]$ fermé borné t.q. $x \in [a,b]$.

et soit $x_1 \in [a,b]$. On pose

$$h_n(x) = \int_{x_1}^{x} f_n'(t)\,dt \qquad \text{pour } x \in [a,b].$$

D'après la proposition du théorème 5, on a $h_n \xrightarrow[\text{sur}[a,b]]{C.U} h$

avec $h(x) = \int_{x_1}^{x} g(t)\,dt$ et g la limite uniforme de f_n' sur $[a,b]$.

$$h_n(x) = \int_{x_1}^{x} f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(x_1)$$

$\downarrow C.U$ ($n \to +\infty$) $\qquad \downarrow$ C.U sur $[a,b]$, $n \to +\infty$ $\qquad \downarrow$ C.S $n \to +\infty$

$$h(x) = \int_{x_1}^{x} g(t)\,dt = f(x) - f(x_1)$$

g est la limite uniforme d'une suite (f_n') continue sur $[a,b]$.

donc g est continue sur $[a,b]$ $\Rightarrow h$ est dérivable sur $[a,b]$ et on a

$h'(x) = g(x)$. Or $h(x) = f(x) - f(x_1)$

$\Rightarrow h'(x) = f'(x) \Rightarrow f'(x) = g(x)$

b/ <u>Cas où les (f_n) sont dérivables sur I</u>

Soit $x \in I$, <u>fixé</u>, $\exists [a,b]$ t.q $x \in [a,b]$.

On définit les fonctions h_n et h de $J = [a,b] \setminus \{x\}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$h_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad ; \quad h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$$h_n \xrightarrow{C.S} h \text{ sur } J.$$

D'autre part : ~~pour~~ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. pour $p, q > n_\varepsilon$ et $t \in J$, on a

$$\left| \left(f_p(t) - f_q(t)\right) - \left(f_p(x) - f_q(x)\right) \right| \leq |t - x| \underbrace{\sup_{z \in (t,x)} |f_p'(z) - f_q'(z)|}_{< \varepsilon}$$

car (f_n') c.u sur $[a,b]$

$$\Rightarrow \quad |h_p(t) - h_q(t)| < \varepsilon.$$

La suite (h_n) converge uniformément sur J.

On a alors
$$\lim_{\substack{t \to x \\ t \neq x \\ t \in [a,b]}} \left(\lim_{n \to +\infty} \text{uniforme } h_n(t) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{\substack{t \to x \\ t \neq x \\ t \in [a,b]}} h_n(t) \right)$$

Puisque $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t \neq x \\ t \in [a,b]}} h_n(t)$ existe : c'est $f_n'(x)$

On obtient donc $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t \neq x}} h(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x)$, Alors f est dérivable en x

et on a $\quad f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x) = g(x)$

(*)

II. Séries de fonctions

1°/ Définitions

Définition 1.

1°/ Soit $D \subseteq \mathbb{R}$. Une série de fonctions de D dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une application $f_n : D \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Etudier la série de fonctions, c'est étudier la suite de fonctions $(S_n)_n$ obtenue avec les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

2°/ Avec ces notations, on dit que la série de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction S si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction S. On notera $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

3°/ On dit que la série de fonctions $(f_n)_n$ converge absolument si la série de fonctions $(|f_n|)_n$ converge.

Pour les séries de fonctions, on dispose d'une autre notion de convergence qui est souvent utilisée.

Définition 2 Une série de fonctions $\sum_n f_n$ définie sur D est dite normalement convergente sur $A \subset D$ lorsqu'il existe une série $\sum_n a_n$, à termes réels positifs, telle que

i/ $\forall x \in A, \ |f_n(x)| \leq a_n$.

ii/ La série $\sum a_n$ converge

Remarque : Cette définition équivaut à dire que les fonctions f_n sont bornées sur A et que la série numérique $\sum_n \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ est convergente.

Exemples

1°/ $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

2°/ $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ car $0 \leq \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$ $\forall x \geq 0$.

Théorème 1 Toute série $\sum_n f_n$ normalement convergente sur A est uniformément et absolument convergente sur A.

Preuve On utilisera le critère de Cauchy : $\forall q > p$ $\forall x \in A$

$$|S_q(x) - S_p(x)| = |f_{p+1}(x) + \dots + f_q(x)| \leq |f_{p+1}(x)| + \dots + |f_q(x)|$$

$\sum a_n$ série à termes positifs convergente. $\leq a_{p+1} + \dots + a_q$ $\forall x \in A$.

D'après le critère de Cauchy, on a $\sum f_n$ est absolument et uniformément convergente.

⚠ Remarque Une série peut être uniformément convergente sur A sans y être normalement convergente.

Contre-exemple

$x \in [0,1]$. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ n'est pas normalement convergente sur $[0,1]$ car $\sup_{[0,1]} \left|\frac{(-1)^n x^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ terme général d'une série divergente



On a pour tout $x \in [0,1]$. $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| \underset{(*)}{\leq} |f_{n+1}(x)| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1} \; \forall x \in [0,1]$

ce qui signifie que $R_n(x)$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$

Les théorèmes vus au paragraphe sur les suites de fonctions peuvent être appliqués aux suites des sommes partielles de suites de fonctions et conduisent aux résultats suivants (*)

<u>Théorème 2</u> (Th. de Continuité)

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $\sum_n f_n$ une série de fonction de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Soit $a \in I$. On suppose :

i/ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a (resp. sur I)

ii/ $\sum f_n$ converge uniformément sur I

alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue en a (resp. sur I).

<u>Théorème 3</u> (Théorème d'interversion de $\sum$ et $\int_a^b$)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que la série $\sum_n f_n$ soit uniformément convergente sur $[a,b]$. Alors

la série $\sum_n \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_n f_n(x)\right) dx$$

Théorème 4 (Théorème de dérivation)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

On suppose que :

a/ $\forall n$, f_n est dérivable (resp. C^1) sur I

b/ La série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné $[a,b] \subset I$

c/ Il existe $x_0 \in I$ tel que $\sum_n f_n(x_0)$ converge

Alors

1°/ La série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné $[a,b] \subset I$

2°/ La somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable (resp. C^1) sur I et on a $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$ (*)

Exemples de mise en œuvre des théorèmes précédents

1°/ Si $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$. On a déjà vu que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2}$ $\forall x \geq 0$. $\frac{1}{1+n^2}$ terme général d'une série à termes positifs convergente.

et comme les f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que la fonction

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+$

On a $f_n'(x) = -\frac{n e^{-nx}}{1+n^2}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ (qui diverge en $x=0$) converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ si $a>0$ car

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{n e^{-na}}{1+n^2} \quad \forall x \geqslant a.$$

$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n e^{-na}}{1+n^2}$ est convergente (Critère de Riemann.)

Le théorème de dérivation implique que $S(x)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec

$$S'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n e^{-nx}}{1+n^2}$$

2°/ On considère $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} x^n$. On a montré que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

f_n continue sur $[0,1]$ $\Rightarrow$

$$S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n \text{ est continue sur } [0,1].$$

Les f_n sont de classe C^1, $f_n'(x) = (-1)^n x^{n-1}$.

et la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ (qui diverge pour $x=1$) converge normalement sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$ car

$$|(-1)^n x^{n-1}| \leqslant a^{n-1} \quad \forall x \in [0,a]$$

Th. de dérivation implique que $S(x)$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ avec

$$(*) \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-1} = -\frac{1}{1+x} \quad \forall x \in [0,1[$$

$$S'(x) + \frac{1}{1+x} = 0 \Rightarrow S(x) + \ln(1+x) = cte = C \quad \forall x \in [0,1[$$

$$x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(x) = -\ln(1+x) \quad \forall x \in [0,1[.$$

Or S est continue sur $[0,1]$, alors

$$S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \to 1^-} S(x) = \lim_{x \to 1^-} -\ln(1+x) = -\ln 2$$

__Remarque__ À partir de $(*)$, on a la convergence normale de la série sur $[0,a]$ avec $0<a<1$.
Le théorème sur l'intégration implique que

$$\forall a \in]0,1[\quad \int_0^a -\frac{dx}{1+x} = \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-1}\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^a (-1)^n x^{n-1} dx$$

soit $-\ln(1+a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} a^n$.

. théorème de continuité sur $[0,1] \Rightarrow S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

__Théorème (d'Abel Uniforme)__

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Soient (f_n) et (g_n) des séries de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On suppose

1°/ $\exists A \in \mathbb{R}$ $\forall p, q$ dans $\mathbb{N}$ $p<q$, $\forall x \in I$, on a

$$|g_{p+1}(x) + \dots + g_q(x)| \leq A$$

2°/ La suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur I.

3°/ La série $(|f_n - f_{n+1}|)$ est uniformément convergente sur I.

Alors la série de fonctions $(f_n \cdot g_n)$ est uniformément convergente sur I.

__Preuve__ Même idée que dans les séries d'Abel
on fixe un x et passe au sup.

Corollaire 1. Dans le théorème d'Abel uniforme, on peut remplacer la 3ème hypothèse par :

3°/ $\forall x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante.

Corollaire 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. $h_n = (-1)^n f_n$ où (f_n) est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose

1°/ $\forall x \in I$ $(f_n(x))_n$ est décroissante.

2°/ La suite $(f_n)_n$ cv. unif sur I.

Alors la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} h_n$ converge uniformément sur I

Exemples

1°/ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique décroissante et convergeant vers 0, alors les séries de fonctions

$$(u_n e^{inx}) \quad (u_n \cos nx) \quad (u_n \sin nx)$$

sont uniformément convergentes sur tout intervalle fermé I ne contenant pas d'éléments de $2\pi\mathbb{Z}$

En effet $\forall\, p < q$ et $x \in I$, on a

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} \cos kx\right| \leq \left|\sum_{k=p+1}^{q} e^{ikx}\right| \quad \text{or} \quad \left|\sum_{k=p+1}^{q} e^{ikx}\right| = \left|e^{i(p+1)x}\, \frac{1-e^{i(q-p)x}}{1-e^{ix}}\right|$$

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} \sin kx\right| \leq \left|\sum_{k=p+1}^{q} e^{ikx}\right| \qquad \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|} \leq A \quad A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I.$$

On peut donc appliquer le corollaire 1 du théorème d'Abel uniforme.

(Car I fermé ne contenant pas des éléments de $2\pi\mathbb{Z}$ et l'app. $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{|1-e^{ix}|}$ est continue Donc admet une borne sup.)

2°/ Soit $h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$ $x \in [1, +\infty[$.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} h_n(x)$ convergente uniformément sur $[1, +\infty[$

$\forall x \geq 1$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$. la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante

$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow$ ~~(...)~~ $f_n \xrightarrow{C.U} 0$ sur $[1, +\infty[$.

Suites et séries de fonctions.

Préface ou motivation.

Les suites et séries de fonctions ont été inventées pour construire des fonctions qui sont solutions de certains problèmes : Equations différentielles ou fonctionnelles.

Voici deux problèmes assez significatifs.

Exemple 1 Il existe une et une seule fonction f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

f est croissante sur $]0,+\infty[$.

$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \ln(x) \right) = 0$

Elle est donnée pour $x > 0$ par

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \left[\ln(n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \right]$$

Exemple 2 On se donne $a \in I$ et $q \in C(I, \mathbb{K})$:

L'équation différentielle linéaire

$$\begin{cases} y''(x) - q(x)y(x) = 0 \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = \beta \end{cases}$$

admet une unique solution de classe C^2 sur l'intervalle I.

On peut construire cette solution comme limite, en un sens que l'on précisera, de la suite de fonction (y_n) définie par

$$\begin{cases} y_0(x) = \alpha \\ y_{n+1}(x) = \alpha + \beta(x-a) + \int_a^x (x-t)\, q(t)\, y_n(t)\, dt \end{cases}$$


ETUSUP.com